Intersection problems in the q-ary cube

徳重 典英

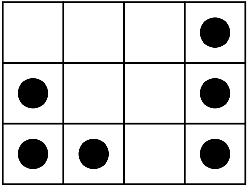
琉球大学

離散数学とその応用研究集会 2015
2015 年 8 月 22 日@熊本大学

この講演は Peter Frankl 氏との共同研究に基づくものです。

ベクトルに対応するカード

例: $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0, 3) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.



第 i 列に、下から a_i 個の黒丸を書く。

ベクトルに対応するカード

例: $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0, 3) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.

			●
●			●
●	●		●

第 i 列に、下から a_i 個の黒丸を書く。

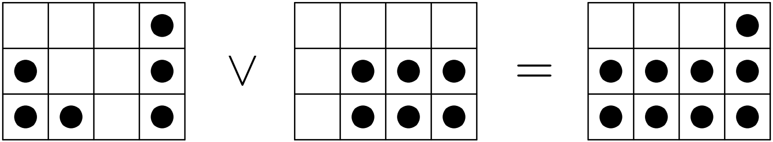
$\boldsymbol{a}$ の重み:

$$|\boldsymbol{a}| := (\text{黒丸の総数}) = 2 + 1 + 0 + 3 = 6$$

Join (union)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \bullet \\ \hline \bullet & & & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & & \bullet \\ \hline \end{array} \vee \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$$

Join (union)



$$(2,1,0,3) \vee (0,2,2,2) = (2,2,2,3).$$

$$(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})_i = \max\{a_i, b_i\}.$$

正整数 n, k, q に対して、

$$X_q := \{0, 1, \ldots, q-1\},$$

$$X_q^n := \{a = (a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in X_q\}$$

$= q - 1$ 行 n 列の黒丸つきカード全体。

(q-ary n-cube)

正整数 n, k, q に対して、

$$X_q := \{0, 1, \dots, q-1\},$$

$$X_q^n := \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in X_q\}$$

$= q-1$ 行 n 列の黒丸つきカード全体。

(q-ary n-cube)

もし $q = 2$ なら、

$$X_2^n = \{0, 1\}^n \cong 2^{[n]}$$

正整数 n, k, q に対して、

$$X_q := \{0, 1, \ldots, q-1\},$$

$$X_q^n := \{a = (a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in X_q\}$$

$= q-1$ 行 n 列の黒丸つきカード全体。

(q-ary n-cube)

もし $q = 2$ なら、

$$X_2^n = \{0, 1\}^n \cong 2^{[n]}$$

(cf. Adachi–Nozaki $\{0, \pm 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$)

整数 $q \geq 2$ と $s \geq 1$ を固定。

$A \subset X_q^n$ が s-*union* とは、

$$|\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}| \leq s \text{ for all } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A.$$

整数 $q \geq 2$ と $s \geq 1$ を固定。

$A \subset X_q^n$ が s-*union* とは、

$$|\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}| \leq s \text{ for all } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A.$$

問題

次の関数を求めよ。

$$w_q^n(s) := \max\{|A| : A \subset X_q^n \text{ は } s\text{-union}\}$$

$w_q^n(s)$ についてわかっていること。

- $q = 2$ の場合。Katona の定理。

$w_q^n(s)$ についてわかっていること。

- $q = 2$ の場合。Katona の定理。
- $n > n_0(s, q)$ の場合。
- $(q - 1)n = s + 1$ の場合。

$w_q^n(s)$ についてわかっていること。

- $q=2$ の場合。Katona の定理。
- $n>n_0(s,q)$ の場合。
- $(q-1)n=s+1$ の場合。
- $n=3,\ q\geq s$ の場合。$\longleftarrow$ 今日の話題

復習

$$w_q^n(s) = \max\{|A| : A \subset X_q^n \text{ は } s\text{-union}\}.$$

$$(s\text{-union} \iff |\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}| \le s \text{ for all } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A.)$$

復習

$$w_q^n(s) = \max\{|A| : A \subset X_q^n \text{ は } s\text{-union}\}.$$
$$(s\text{-union} \iff |\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}| \le s \text{ for all } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A.)$$

以下、q は十分大きいと仮定。($q \ge s$)
$w_q^n(s)$ を $w^n(s)$, X_q^n を X^n と略記。

復習

$$w_q^n(s) = \max\{|A| : A \subset X_q^n \text{ は } s\text{-union}\}.$$
$$(s\text{-union} \iff |\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}| \leq s \text{ for all } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A.)$$

以下、q は十分大きいと仮定。$(q \geq s)$
$w_q^n(s)$ を $w^n(s)$, X_q^n を X^n と略記。

$n = 3$ の場合を考える。

問題

$w^3(s)$ を求めよ。

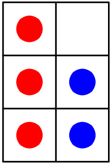
その前に練習

$w^2(5)$ は?

その前に練習

$w^2(5)$ は?

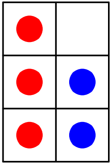
$$w^2(5) \geq 4 \times 3 = 12.$$



その前に練習

$w^2(5)$ は?

$$w^2(5) \geq 4 \times 3 = 12.$$

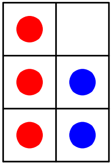


$\boldsymbol{a} = (3,2)$ の部分カード全体。
($\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ if $a_i \geq b_i$ for all i.)
$4 \times 3 = 12$ 枚のカードがある。

練習

$w^2(s) \geq \lceil \frac{s}{2} + 1 \rceil \lfloor \frac{s}{2} + 1 \rfloor.$

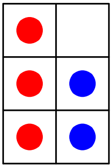
例: $w^2(5) \geq 4 \times 3 = 12.$

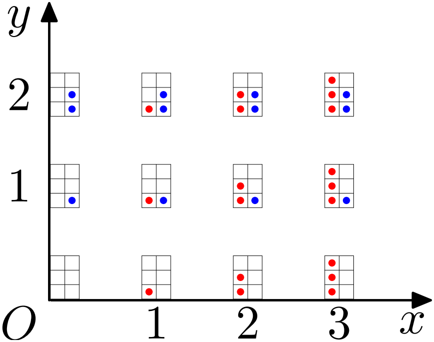


練習

$$w^2(s) \geq \lceil \tfrac{s}{2} + 1 \rceil \lfloor \tfrac{s}{2} + 1 \rfloor.$$

例: $w^2(5) \geq 4 \times 3 = 12.$





練習

$$w^2(s) \leq \left\lceil \frac{s}{2} + 1 \right\rceil \left\lfloor \frac{s}{2} + 1 \right\rfloor.$$

練習

$w^2(s) \le \lceil \frac{s}{2} + 1 \rceil \lfloor \frac{s}{2} + 1 \rfloor.$

$A \subset X^2$ を s-union とし、

$$m := \max\{x : (x, y) \in A\}.$$

練習

$w^2(s) \leq \lceil \frac{s}{2} + 1 \rceil \lfloor \frac{s}{2} + 1 \rfloor.$

$A \subset X^2$ を s-union とし、

$$m := \max\{x : (x, y) \in A\}.$$

もし $(x, y) \in A$ なら

$$\begin{aligned} &0 \leq x \leq m, && (m\text{ の定義から}) \\ &0 \leq y \leq s - m. && (s\text{-union の性質}) \end{aligned}$$

練習

$$w^2(s) \le \lceil \tfrac{s}{2} + 1 \rceil \lfloor \tfrac{s}{2} + 1 \rfloor.$$

$A \subset X^2$ を s-union とし、

$$m := \max\{x : (x, y) \in A\}.$$

もし $(x, y) \in A$ なら

$$0 \le x \le m, \qquad (m \text{ の定義から})$$

$$0 \le y \le s - m. \qquad (s\text{-union の性質})$$

従って

$$|A| \le (m+1)(s-m+1) \le \left\lceil \frac{s}{2} + 1 \right\rceil \left\lfloor \frac{s}{2} + 1 \right\rfloor.$$

問題

$w^3(10)$ を求めよ。

問題

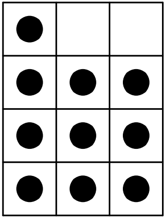
$w^3(10)$ を求めよ。

●		
●		●
●		●
●	●	●

3列（天井なし）カードをうまく選んで、どの2枚の join ($\vee$) も重み10以下にする。最大で何枚のカードを選べるか？

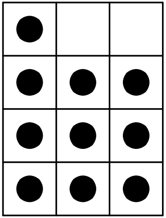
問題

$w^3(10)$ を求めよ。



問題

$w^3(10)$ を求めよ。



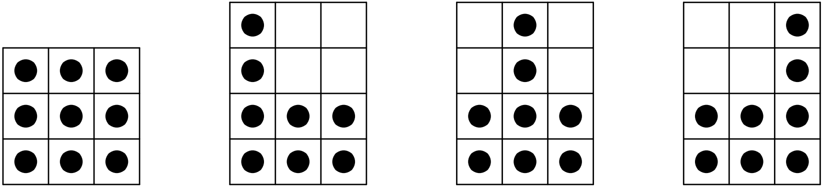
$\boldsymbol{a} = (4, 3, 3)$ の部分カード全体。

($\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ if $a_i \geq b_i$ for all i.)

$5 \times 4 \times 4 = 80$ 枚のカード。

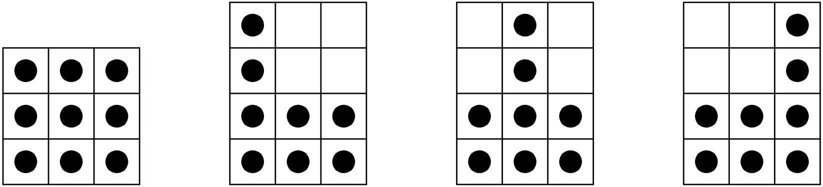
答

$$w^3(10) = 91$$



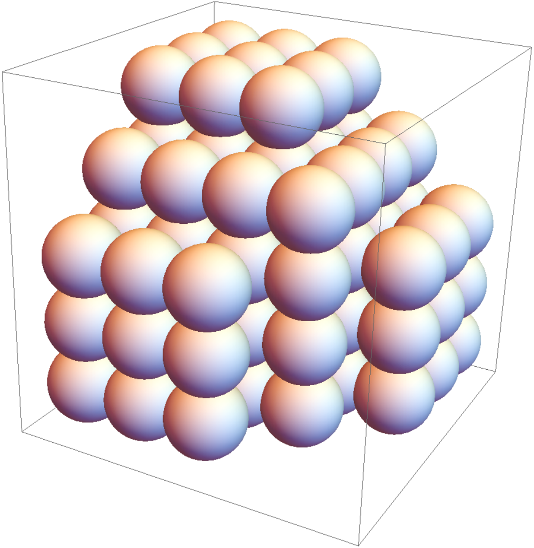
答

$$w^3(10) = 91$$

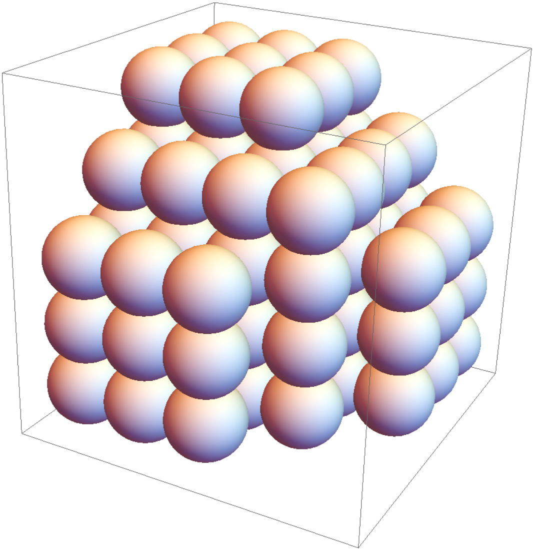


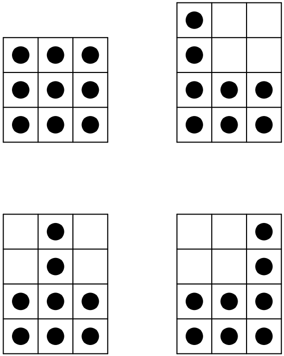
$$4^3 + 3^2 + 3^2 + 3^2 = 91$$

91枚のカードを三次元的に描く。

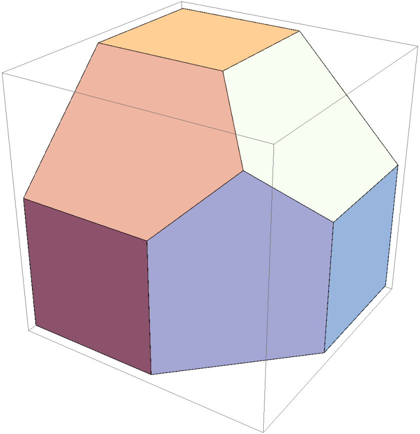


91 枚のカードを三次元的に描く。

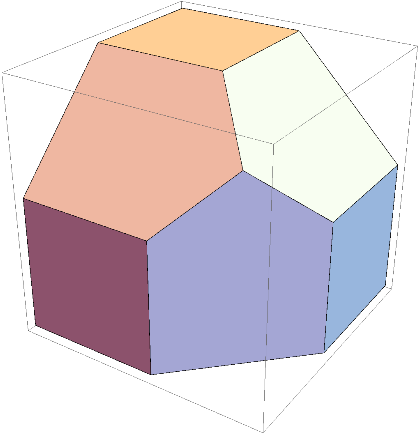




$$4^3+3^2+3^2+3^2=91$$

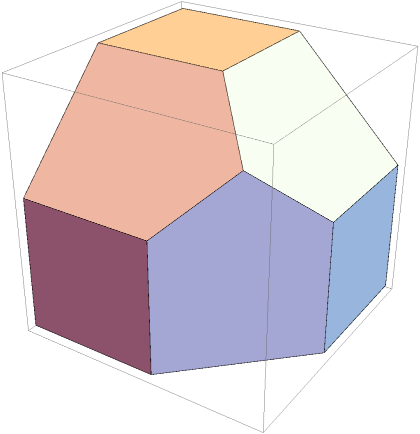


極限の形



極限の形

多面体の体積から
$w^3(s)$ を近似できる。



極限の形

多面体の体積から
$w^3(s)$ を近似できる。

定理

$$w^3(s) = \frac{33 + 8\sqrt{2}}{961} s^3 + O(s^2).$$

今回、得られた結果

- $w^3(s)$ を決定した。

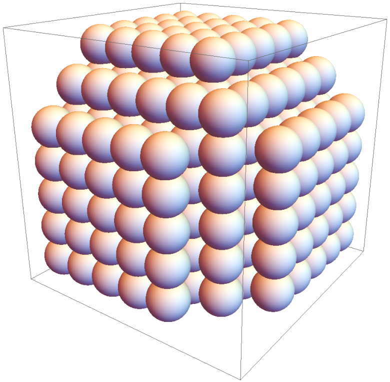
今回、得られた結果

- $w^3(s)$ を決定した。
- $w^3(s)$ を与える s-union の族も決定した。

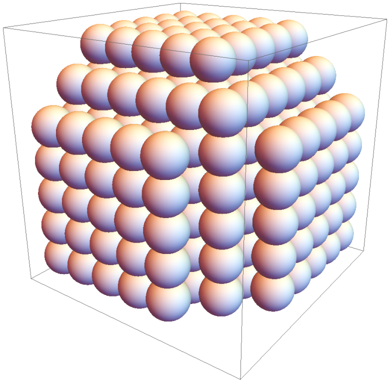
今回、得られた結果

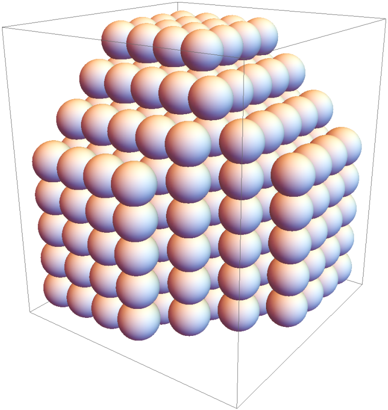
- $w^3(s)$ を決定した。
- $w^3(s)$ を与える s-union の族も決定した。
- その族は、各 s について高々 2 種類。

例：$w^3(16) = 291$

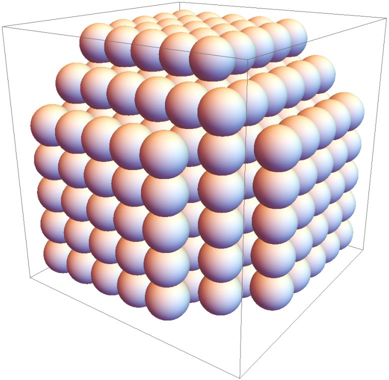


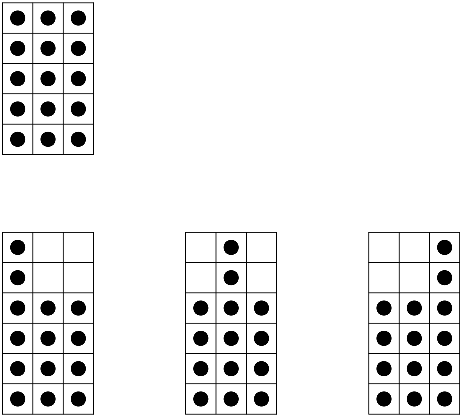
例：$w^3(16) = 291$





$w^3(16) = 291$





$w^3(16) = 291$