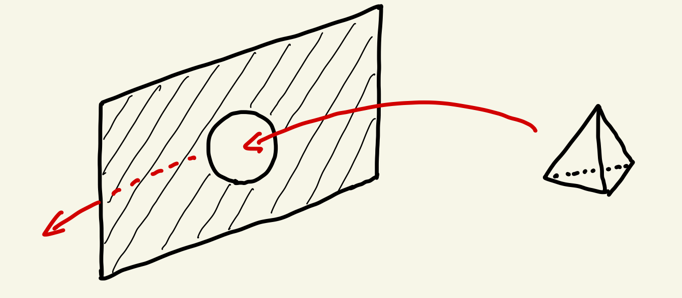
円と直線のなす配置

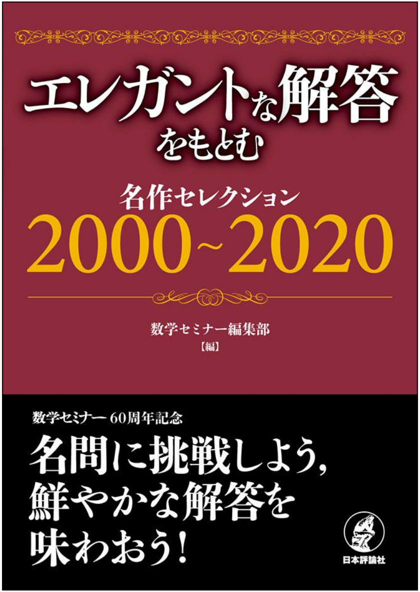
徳重 典英（琉球大学教育学部）

直観幾何学 2023 @椙山女学園大学



Itoh–Tanoue–Zamfirescu 2006
単位正四面体が通過できる円形の壁穴の最小値を決定した。

問題 単位正四面体が通過できる正三角形の壁穴の最小サイズは？



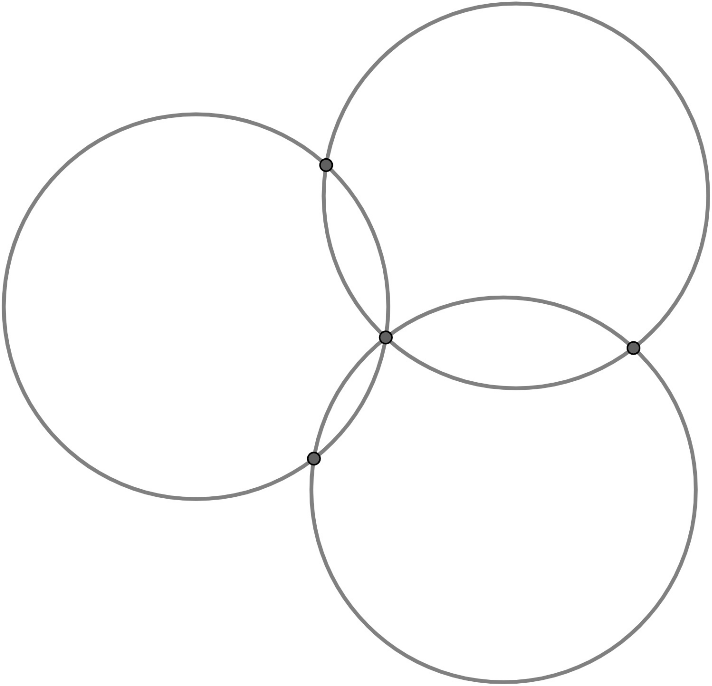
「円と直線のなす配置」

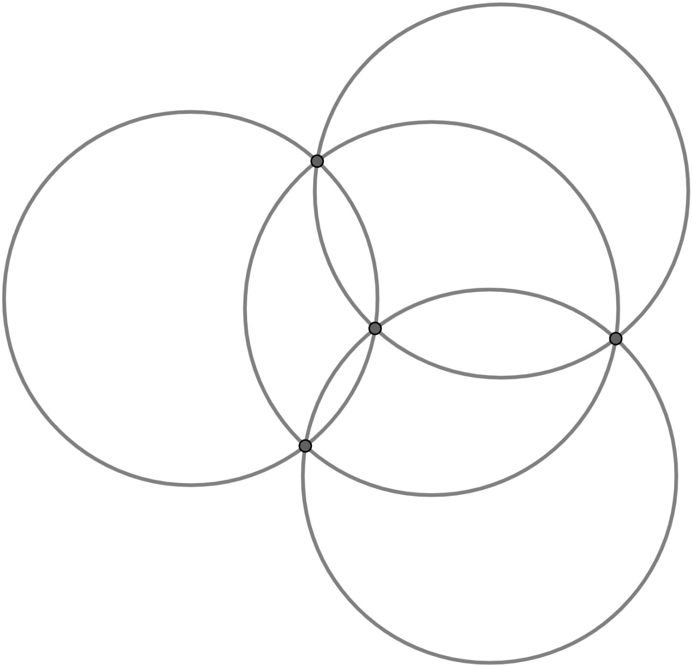
数学セミナー

2021年10月号

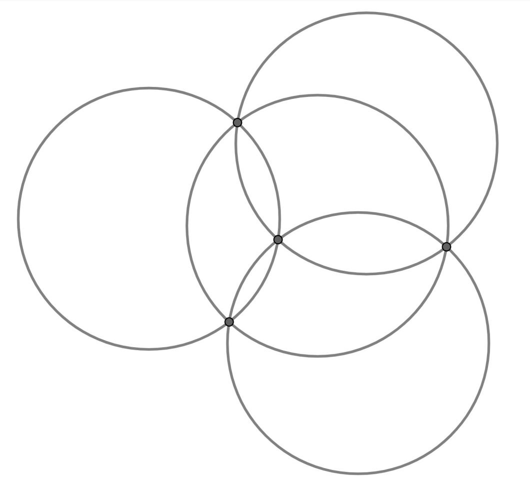
2021年11月号

2022年1月号

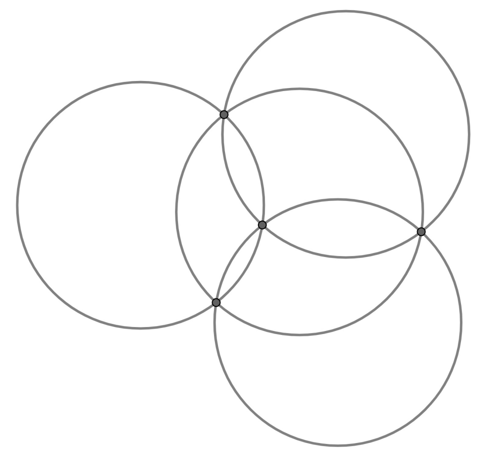




例　平面上の４個の単位円周で、
どの３個の交わりも空でないものがある。



例　平面上の４個の単位円周で、
どの３個の交わりも空でないが、
４個の交わりは空のものがある。



問題

$\mathbb{R}^d$ 上の $d+2$ 個の単位球面で、
どの $d+1$ 個の交わりも空でないが、
$d+2$ 個の交わりは空のものがあるか？

答 (Maehara+T, 2006, 2009)

$d=2$ または $d \geq 4$ なら、ある。
$d=3$ なら、**ない**。

定理

$\mathbb{R}^3$ 上の 5 個の単位球面で、
どの 4 個の交わりも空でないが、
5 個の交わりは空のものは存在しない。

単位球面であることは本質的

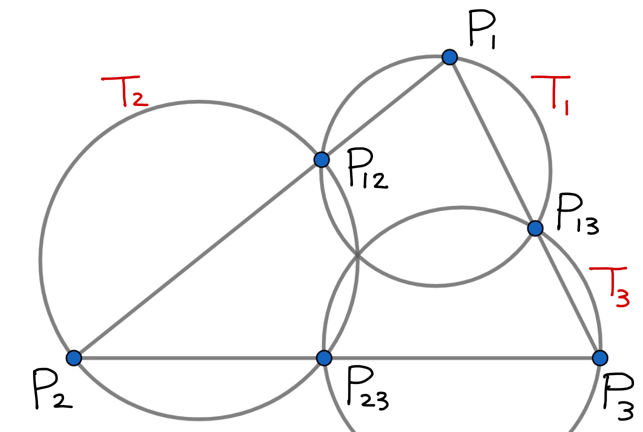
定理 (Grace 1898)

四面体の傍接球は外接球に含まれない。

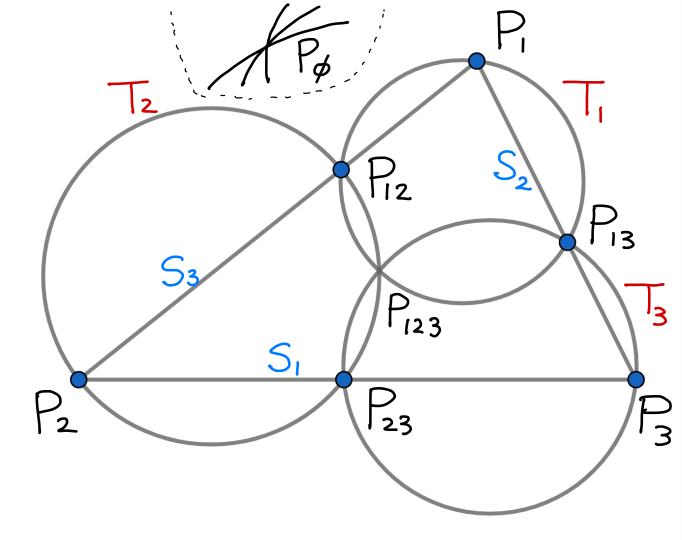
証明に double six の性質を使う

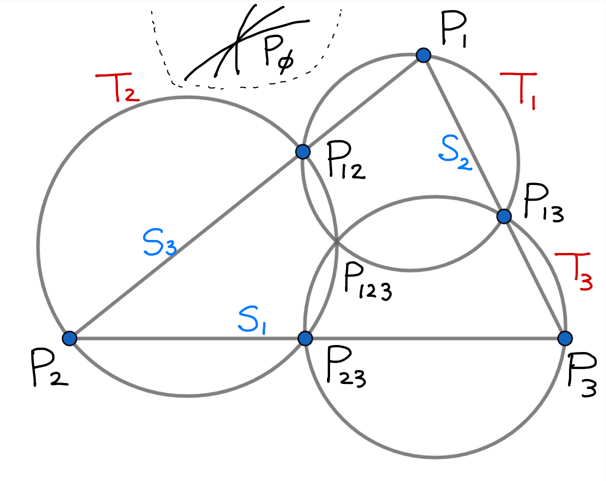
例 (Miquel 1838)

三角形 $P_1P_2P_3$ の各辺上に点 P_{ij} をとる。
これら 6 点から定まる 3 個の円周
T_1, T_2, T_3 は一点で交わる。

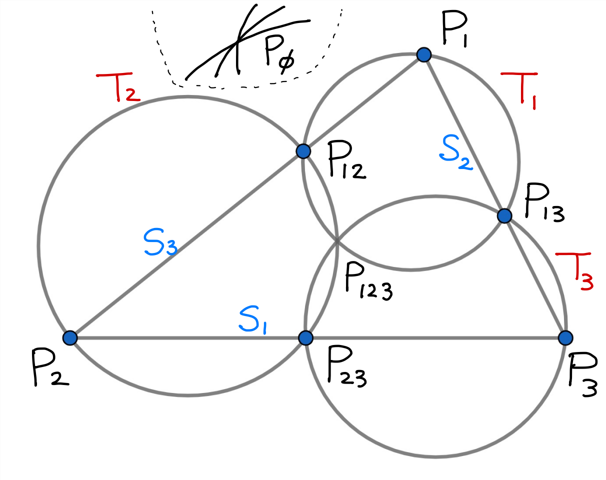


P_1 と P_2 を通る直線を S_3 等とし、3直線 S_1, S_2, S_3 は無限遠点で交わると考える。





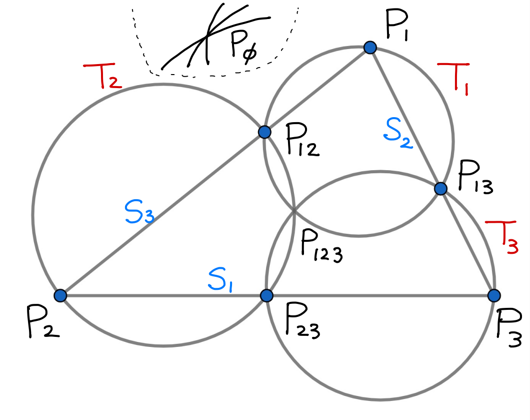
$$P_\emptyset = S_1 S_2 S_3$$
$$P_1 = T_1 S_2 S_3$$
$$P_2 = S_1 T_2 S_3$$
$$P_3 = S_1 S_2 T_3$$
$$P_{12} = T_1 T_2 S_3$$
$$P_{13} = T_1 S_2 T_3$$
$$P_{23} = S_1 T_2 T_3$$
$$P_{123} = T_1 T_2 T_3$$

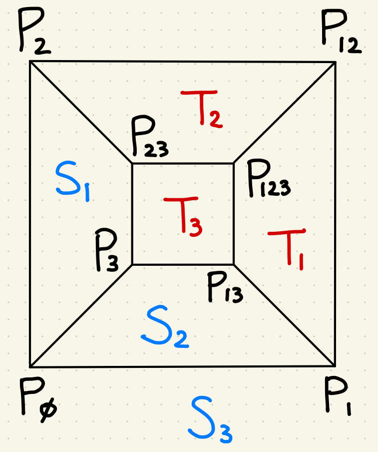


$$P_\emptyset = 000$$
$$P_1 = 100$$
$$P_2 = 010$$
$$P_3 = 001$$
$$P_{12} = 110$$
$$P_{13} = 101$$
$$P_{23} = 011$$
$$P_{123} = 111$$

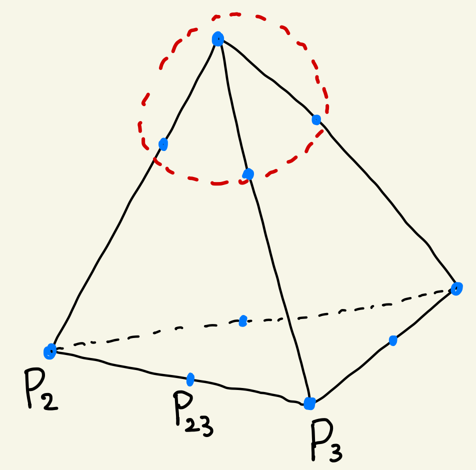
$$S \Leftrightarrow 0,\ T \Leftrightarrow 1$$

Miquelの配置構造は立方体に対応する。





例　四面体 $P_1P_2P_3P_4$ の各辺上に点 P_{ij} をとる。これら 10 点から定まる 4 球面 T_1, T_2, T_3, T_4 は一点で交わる。



(自然に高次元に一般化できる)

d 次元単体における球面配置構造は、
$d+1$ 次元立方体に対応する。

(超) 立方体のもつ帰納的な性質を使って
球面配置の定理を帰納法で証明できる。

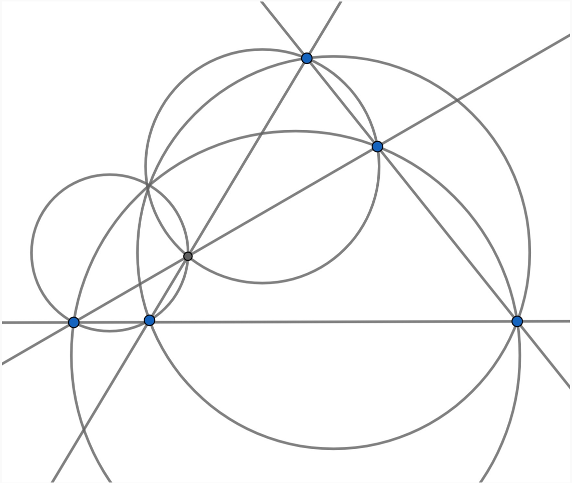
球面配置構造に対応する多面体があると
面白い！

(多面体の組合せ構造だけだと球面の半径の情報などは反映
されない)

例 (Wallace 1804)

$\mathbb{R}^2$ 上の 4 直線から 4 個の三角形が定まる。

これらの 4 個の外接円は一点で交わる。



Wallace の配置構造は 4 次元半立方体 (hemi-cube) に対応。以下の 8 点の凸包。

0000 0011 0101 0110
1111 1100 1010 1001

配置構造の交点は半立方体の頂点に、直線または円は境界面 (の半分) に対応

Wallace の配置構造は 2 通りの無限系列に拡張可能

(a) d 次元の $d+2$ 枚の超平面から出発

(b) 平面上の n 本の直線から出発
(クリフォードの定理)

どちらも高次元半立方体に対応するが、対応する境界面が異なる。

d 次元半立方体の境界面は $2d$ 個の半立方体と 2^d 個の単体

Wallace の配置構造の 4 直線を、無限遠点を通る 4 個の円周と考える。

$\mathbb{R}^2$ の 8 個の円周と 8 個の交点の構造で、
どの円周上にも 4 個の交点があり、
どの交点も 4 個の円周が通る。

$\mathbb{R}^2$ の 8 個の円周と 8 個の交点の構造で、
どの円周上にも 4 個の交点があり、
どの交点も 4 個の円周が通る。

(a) $\mathbb{R}^d$ の $2(d+2)$ 個の球面と 2^{d+1} 個の交点で、
どの球面上にも 2^d 個の交点があり、
どの交点も $d+2$ 個の球面が通る構造がある。

(b) $\mathbb{R}^2$ の 2^{n-1} 個の円周と 2^{n-1} 個の交点で、
どの円周上にも n 個の交点があり、
どの交点も n 個の円周が通る構造がある。

$\mathbb{R}^3$ の 27 個の球面と 72 個の交点の構造で、
どの球面上にも 16 個の交点があり、
どの交点も 6 個の球面が通るものがある。
(Grace 1898)

対応する 6 次元多面体がある。(次の講演)

同様の球面配置構造は (a), (b) の無限系列
以外には 8 種類しかなく、すべて分類さ
れている。(Loguet-Higgins 1972)