交差族の組合せ論とその周辺

徳重 典英 （琉球大学教育学部）

第 68 回 代数学シンポジウム ＠名古屋大学

MSC 2020

05Dxx Extremal combinatorics（極値組合せ論）

05D05 Extremal set theory（極値集合論）

$$
\begin{aligned}
2^X &:= \{F : F \subset X\}, \\
\binom{X}{k} &:= \{F \subset X : |F| = k\}, \\
[n] &:= \{1, 2, \ldots, n\},
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F} \subset 2^X$ は頂点集合 X 上のハイパーグラフ

$\mathcal{F} \subset \binom{X}{k}$ は頂点集合 X 上の k グラフ

$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が交差族 $\iff F \cap F' \neq \emptyset$ for $\forall F, F' \in \mathcal{F}$

問：このとき $|\mathcal{F}|$ の最大値は？

例：$n = 3, \quad \mathcal{F} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

$$\begin{array}{lll} 1 & 12 & (\emptyset \quad 123) \\ 12 & 13 & (1 \quad 23) \\ 13 & 23 & (2 \quad 13) \\ 123 & 123 & (3 \quad 12) \end{array}$$

答：$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が交差族ならば $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ である。

等号の例 $\{F \subset [n] : 1 \in F\}$, 他にも

$$\{F \subset [n] : |F \cap [2i+1]| \geq i+1\}.$$

1. Erdős–Ko–Rado

問：$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族のとき、$|\mathcal{F}|$ の最大値は？

- $n < 2k$ なら $\binom{[n]}{k}$ は交差族
- $n \geq 2k$ のときは？
- $\{F \in \binom{[n]}{k} : 1 \in F\}$ はサイズ $\binom{n-1}{k-1}$ の交差族

定理 (Erdős–Ko–Rado, 1930s)
$n \geq 2k$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族ならば $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

さらに $n > 2k$ ならサイズ最大の交差族は一点を固定する。

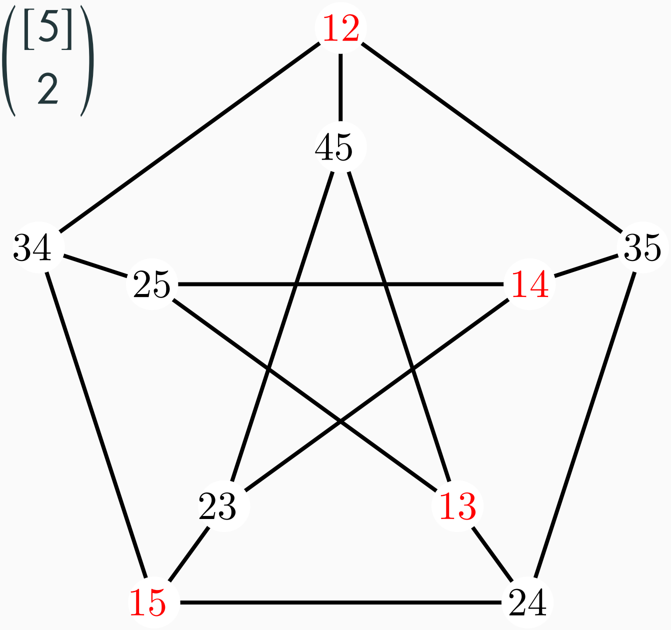
Kneser グラフ $G = (V, E)$ を次で定義：

$$V = \binom{[n]}{k}, \quad E = \{\{u, v\} : u \cap v = \emptyset\}.$$

- $U \subset V$ が独立集合 $\iff$ U 内に辺がない
  $\iff$ U は交差族
- G の隣接行列 A の行、列を V に対応させ、$(A)_{u,v}$ は $\{u, v\} \in E$ なら 1, そうでなければ 0.
- グラフの固有値から、独立集合 U のサイズの上界がわかる。(Hoffman's ratio bound 1974?)

$$|U| \leq \frac{-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} |V|$$

例: $V = \binom{[5]}{2}$



	12	13	23	14	24	34	15	25	35	45
12	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
13	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
$\cdots$					$\cdots$	$\cdots$				
$\cdots$					$\cdots$	$\cdots$				
45	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

- $\det(xI_{10} - A) = (x-3)(x-1)^5(x+2)^4$.
- $\lambda_{\max} = 3$, $\lambda_{\min} = -2$.
- ratio bound は

$$\frac{-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}|V| = \frac{2}{3+2} \cdot 10 = 4.$$

一般の場合

Kneser グラフ $G = (V, E)$:

$$V = \binom{[n]}{k}, \quad E = \{\{u, v\} : u \cap v = \emptyset\}.$$

- $\lambda_{\max} = \binom{n-k}{k}$, $\lambda_{\min} = -\binom{n-k-1}{k-1}$.
- ratio bound $= \dfrac{-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} |V| = \dbinom{n-1}{k-1}$.

ここから EKR の定理の不等式が得られる。

EKRの q 類似

- V_n: $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間
- $\begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$: V_n の k 次元部分空間全体、$\mathcal{F} \subset \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}$
- $\mathcal{F}$ が交差族 $\Leftrightarrow \dim(F \cap F') \geq 1$ for $\forall F, F' \in \mathcal{F}$

先と全く同じ方法で次がわかる。

定理 (qEKR, Frankl–Wilson 1986)
$n \geq 2k$ で $\mathcal{F} \subset \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ が交差族ならば $|\mathcal{F}| \leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$.

2. Ratio Boundの証明

ratio bound の証明

$G = (V, E)$ は正則グラフ、$U \subset V$ は独立集合。

このとき

$$|U| \leq \frac{-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} |V|.$$

ratio bound の証明

$G = (V, E)$ は正則グラフ、$N := |V|$,
$U \subset V$ は独立集合。A は G の隣接行列。

- A の固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ を ONB にとる。
- $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$. $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} 1$ とする。
- U の特性ベクトル $1_U \in \{0, 1\}^V$ を $1_U = \sum \alpha_i \mathbf{v}_i$ と展開。

$$|U| = \langle 1_u, 1_u \rangle = \langle \sum \alpha_i \mathbf{v}_i, \sum \alpha_j \mathbf{v}_j \rangle = \sum \alpha_i^2,$$
$$|U| = \langle 1_u, 1 \rangle = \langle \sum \alpha_i \mathbf{v}_i, \sqrt{N} \mathbf{v}_1 \rangle = \sqrt{N} \alpha_1,$$
$$\langle A 1_U, 1_U \rangle = \sum_{x,y} (A)_{x,y} (1_U)_y (1_U)_x = 0.$$

$\sum \alpha_i^2 = |U|, \qquad \alpha_1^2 = |U|^2/N, \qquad \langle A1_U, 1_U\rangle = 0.$

$$\begin{aligned}
\langle A1_U, 1_U\rangle &= \langle \sum \alpha_i\lambda_i\mathbf{v}_i, \sum \alpha_j\mathbf{v}_j\rangle \\
&= \alpha_1^2\lambda_1 + \left(\alpha_2^2\lambda_2 + \cdots + \alpha_N^2\lambda_N\right) \\
&\geq \alpha_1^2\lambda_1 + \lambda_{\min}\left(\alpha_2^2 + \cdots + \alpha_N^2\right) \\
&= \alpha_1^2\lambda_1 + \lambda_{\min}\left(\sum \alpha_i^2 - \alpha_1^2\right).
\end{aligned}$$

まとめると $\quad |U| \leq \dfrac{-\lambda_{\min}}{\lambda_1 - \lambda_{\min}} N.$ (証明終わり)

- 連結 d 正則グラフならば $\lambda_1 = d = \lambda_{\max}$.
- 等号成立 $\Leftrightarrow 1_U \in \mathrm{span}\{1, \lambda_{\min}$の固有ベクトル$\}$.

3. 測度版EKR

重み付きのサイズ（測度版）

$p \in (0,1)$, $\Omega = 2^{[n]}$ とおく。$F \in \Omega$ の重みを

$$w(F) := p^{|F|}(1-p)^{n-|F|},$$

測度 $\mu_p : 2^{\Omega} \to [0,1]$ を $\mu_p(\mathcal{F}) := \sum_{F \in \mathcal{F}} w(F)$ と定義。

- $\mu_p(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$,
- $\mathcal{F}_0 = \{F \in 2^{[n]} : 1 \in F\}$ なら $\mu_p(\mathcal{F}_0) = p$.

定理 (測度版 EKR)
$p \leq \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が交差族ならば $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p$.

- $p \le \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が交差族なら $\mu_p(\mathcal{F}) \le p$.
- $\frac{k}{n} \le \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族なら $|\mathcal{F}|/\binom{n}{k} \le \frac{k}{n}$.

$p \sim \frac{k}{n}$ で測度版 EKR と EKR の間に対応がある。

問題：この二つを特別な場合に含む定理は？

測度版EKRをratio boundから得るには？

隣接行列 A の拡張

ratio bound の証明に使ったこと：

- A の行和は一定（$A1 = \lambda 1$).
- $\langle A1_U, 1_U \rangle = \sum (A)_{x,y}(1_U)_x(1_U)_y = 0$.

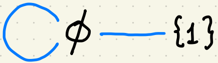
$x \nsim y$ なら $(A)_{x,y} = 0$ が必要だが、$x \sim y$ なら $(A)_{x,y}$ の値は 1 でなくてもよい。

行和が一定で、$x \nsim y$ なら $(A)_{x,y} = 0$ をみたす行列を改めて「隣接行列」とよぶ。

測度版 EKR に対応するグラフ $G = (V, E)$

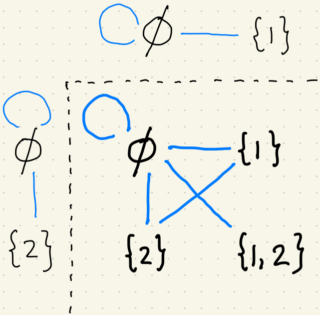
$$V = 2^{[n]}, \quad E = \{\{u, v\} : u \cap v = \emptyset\}.$$

$n = 1$



	ϕ	$\{1\}$
ϕ	*	*
$\{1\}$	*	0

$n = 2$



	ϕ	1	2	12
ϕ	*	*	*	*
1	*	0	*	0
2	*	*	0	0
12	*	0	0	0

測度版 EKR に対応するグラフ $G = (V, E)$

$$V = 2^{[n]}, \quad E = \{\{u, v\} : u \cap v = \emptyset\}.$$

$U \subset V$ を独立集合, A を隣接行列とする。

ratio bound が機能するには次を満たしてほしい：

- $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$
- $\lambda_{\max} = 1$, $\lambda_{\min} = -\frac{p}{1-p}$
- $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$

そんな A と内積を見つけたい。(Friedgut のアイデア)

測度版 EKR に対応するグラフ $G = (V, E)$

$$V = 2^{[n]}, \quad E = \{\{u, v\} : u \cap v = \varnothing\}.$$

隣接行列 A を

$$A := A_1 \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_1 \quad (n \text{ times})$$

と定義、ただし

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 - \frac{p}{1-p} & \frac{p}{1-p} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

内積は $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^V$ に対して次のように定義：

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_{\mathbf{x} \in V} (\mathbf{u})_x (\mathbf{v})_x \, \mu_p(x).$$

この設定で ratio bound から測度版 EKR がしたがう。

4. t交差族

t 交差族

$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が t 交差族 $\Leftrightarrow$ $|F \cap F'| \geq t$ for $\forall F, F' \in \mathcal{F}$

定理 (測度版 tEKR) $p \leq \frac{1}{t+1}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が t 交差族ならば $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p^t$.

隣接行列を「うまく」作ると ratio bound から定理が得られる。

- k グラフ: (EKR 1938, Fnankl 1978) Wilson 1984
- q 類似: Frankl–Wilson 1986
- 測度版: (Ahlswede–Khachatrian 1998, Dinur–Safra 2005, T 2005) Friedgut 2008

$\mathcal{F}$ を t 交差族とする。

- $\mathcal{F} = \{F \subset [n] : |F| > (n+t)/2\}$ は t 交差族で $p > \frac{1}{2}$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = 1$.
- $\frac{1}{t+1} < p \le \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が t 交差族のとき $\mu_p(\mathcal{F})$ の最大値は？

Ahlswede–Khachatrian が解決 1997–1999.

定理 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が t 交差族なら $\mu_p(\mathcal{F}) \le \max_i \mu_p(\mathcal{F}_i)$, ただし $\mathcal{F}_i := \{F \subset [n] : |F \cap [2i+t]| \ge i+t\}$.

問題：AK の結果の代数的な証明は？

5. 対称群のEKR

対称群 S_n の EKR

$\mathcal{F} \subset S_n$ が交差族
$\iff \forall \sigma, \tau \in \mathcal{F}, \exists i \in [n], \sigma(i) = \tau(i)$

定理 $\mathcal{F} \subset S_n$ が交差族ならば $|\mathcal{F}| \le (n-1)!$ である。
等号成立の $\mathcal{F}$ は S_n の 1-coset に限る。
($\{\sigma \in S_n : \sigma(i) = j\}$ の形のもの)

Deza–Frankl 1977,

Cameron–Ku, Larose–Malvenuto 2003, Godsil–Meagher 2009

固定点を持たない置換 (derangement) 全体を

$$D := \{\sigma \in S_n : \sigma(i) \neq i \ \text{ for } \forall i \in [n]\}$$

とおく。さらに $d := |D|$ とおく。

D による Cayley グラフ $G = (V, E)$ を次で定義：

$$V = S_n, \quad E = \{\{\sigma, \tau\} : \sigma\tau^{-1} \in D\}.$$

つまり $\sigma \nsim \tau \Leftrightarrow \exists i \in [n], \sigma(i) = \tau(i)$

- $U \subset V$ が独立集合 $\Longleftrightarrow$ U は交差族
- G は d 正則グラフなので最大固有値は d
- 最小固有値は $-d/(n-1)$ (Renteln 2007)

ratio bound から $|U| \leq (n-1)!$ がしたがう。

対称群 S_n の tEKR

$\mathcal{F} \subset S_n$ が t 交差族
$\iff |\{i \in [n] : \sigma(i) = \tau(i)\}| \geq t$ for $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{F}$.

定理 (Ellis–Friedgut–Pilpel 2011)
$n \gg t$ で $\mathcal{F} \subset S_n$ が t 交差族ならば $|\mathcal{F}| \leq (n-t)!$ である。等号成立の $\mathcal{F}$ は S_n の t-coset に限る。

予想 (EFP) 同じことが $t \geq 4$, $n \geq 2t+1$ で成り立つ。
$n > \exp(Ct \log t)$ なら正しい。(Ellis-Lifshitz 2022)

6. 互いに交差する集合族

互いに交差する集合族

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ が互いに交差する
$\iff A \cap B \neq \emptyset$ for $\forall A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

定理 (T 2010, Suda–Tanaka–T 2016)
$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ とする。$\frac{1}{2} \geq p_1 \geq p_2$ で、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が互いに交差するなら、$\mu_{p_1}(\mathcal{A})\mu_{p_2}(\mathcal{B}) \leq p_1 p_2$.

- k グラフ: Pyber 1986, Matsumoto–T 1989
- q 類似: Suda–Tanaka 2014

対応する半正定値計画問題を解くことで得られる。

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta_1 J \Delta_2 \\ \frac{1}{2}\Delta_2 J \Delta_1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X \\ &\text{subject to} && \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \bullet X = 1, \\ & && \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^\top & 0 \end{bmatrix} \bullet X = 0,\ X \geq 0,\ X \succeq 0. \end{aligned}$$

ただし $P \bullet Q := \mathrm{trace}(P^\top Q)$, $(\Delta_i)_{u,u} = \mu_{p_i}(u)$, A は隣接行列。

この主問題に対応する双対問題の最適解を構成し、弱双対定理を用いる。

互いに t 交差する集合族

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ が互いに t 交差する
$\iff |A \cap B| \geq t$ for $\forall A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$.

問題: $\frac{1}{t+1} \geq p_1 \geq p_2$ で、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が互いに t 交差するとき、$\mu_{p_1}(\mathcal{A})\mu_{p_2}(\mathcal{B}) \leq (p_1 p_2)^t$ であるか？

次の場合はOK.

- $p_1 = p_2 \leq 1 - 1/\sqrt[t]{2}$ (T 2013)
- $p_1 = p_2,\ t \geq 14$ (Frankl–Lee–Siggers–T 2014)

7．3重交差族

3重に交差する集合族

$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が 3 重交差族

$$\iff F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \emptyset \text{ for } \forall F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}.$$

- $\mathcal{F} = \{F \subset [n] : |F| > 2n/3\}$ は 3 重交差族で $p > \frac{2}{3}$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = 1$.
- 3 重交差族は (2 重) 交差族なので、$p \leq \frac{1}{2}$ ならば $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p$.

定理 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が 3 重交差族で $p \leq \frac{2}{3}$ なら $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p$.

- 測度版: Frankl–T 2003, Filmus–Golubev–Lifshitz 2021
- k グラフ: Frankl 1976
- q 類似: Chowdhury–Patkós 2010

3 グラフ $\mathcal{G} = (V, E)$ を次で定義:

$$V = 2^{[n]}, \quad E = \{\{u, v, w\} : u \cap v \cap w = \emptyset\}.$$

- $U \subset V$ が独立集合 $\iff$ U は 3 重交差族

問題: 3 グラフの固有値、ratio bound はどうあるべきか？

- Filmus–Golubev–Lifshitz は、3 グラフから複数の重み付きグラフを生成し、それらの固有値たちを用いて 3 グラフの ratio bound を得た。
- FGL の ratio bound から 3 重交差族の測度版 EKR を得る。
- FGL の方法 (そのまま) では、k グラフ、q 類似は示せない。

3重に t 交差する集合族

$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が 3 重 t 交差族

$$\iff |F_1 \cap F_2 \cap F_3| \geq t \text{ for } \forall F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}.$$

例: $\mathcal{F}_i := \{F \subset [n] : |F \cap [3i + t]| \geq 2i + t\}$.

予想: $\mathcal{F}$ が 3 重 t 交差族なら $\mu_p(\mathcal{F}) \leq \max_i \mu_p(\mathcal{F}_i)$.

$p_0(t) := \frac{2}{\sqrt{4t+9}-1}$ とおくと、

$$p \leq p_0 \text{ ならば、} \max_i(\mu_p(\mathcal{F}_i)) = \mu_p(\mathcal{F}_0) = p^t.$$

定理 (T 2023) $t \geq 15$ かつ $p \leq p_0(t)$ で $\mathcal{F}$ が 3 重 t 交差族ならば、$\mu_p(\mathcal{F}) \leq p^t$.

さらに $p < p_0(t)$ かつ $\mu_p(\mathcal{F}) = p^t$ ならば $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}_0$.

問題： 代数的な証明は？

他分野との関連？

Dinur, Irit; Safra, Samuel.
On the hardness of approximating minimum vertex cover. Ann. of Math. 162 (2005), 439–485.

Green, Ben; Tao, Terence.
Freiman's theorem in finite fields via extremal set theory. Combin. Probab. Comput. 18 (2009), 335–355.

Gromov, Mikhail.
Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry. Geom. Funct. Anal. 20 (2010), 416–526.