交差族に関する最近の話題

徳重 典英 （琉球大学）

グラフ理論における連結度を軸とした不変量の精査
2025 年 3 月 3 日 ～ 7 日 @京都大学数理解析研究所

この話のグラフ理論的な意味：

- よい性質をもつ特別なグラフの独立数（的な量）を調べたい。
- そのためにグラフの固有値を利用する。
- 固有値を制御するために隣接行列を拡張する。

アルゴリズム的な解釈：

- 独立数（的な量）を評価する半正定値計画問題を解く。

詳しい内容は arXiv:2503.14844 田中太初氏との共同研究

交差族

1. 交差性に関する制限
   - いろいろな種類がある。
   - 例えば、交差のサイズが t 以上など。
2. 1をみたす「もの」の集まり。
   - 有限集合の「部分集合」の集まり。
   - ベクトル空間の「部分空間」の集まり。
   - 対称群の「置換」の集まり。
   - そのほか、分割、完全マッチング、グラフなど。
   - 集まりはひとつかふたつか 3 個以上（多重交差族）か？
3. 大きい交差族はどんなものか？
   - 大きさをどう測るか？（個数、測度）

交差族

1. 交差性に関する制限
   - いろいろな種類がある。
   - 例えば、交差のサイズが t 以上など。
2. 1をみたす「もの」の集まり。
   - 有限集合の「部分集合」の集まり。
   - ベクトル空間の「部分空間」の集まり。
   - 対称群の「置換」の集まり。
   - そのほか、分割、完全マッチング、グラフなど。
   - 集まりはひとつかふたつか3個以上（多重交差族）か？
3. 大きい交差族はどんなものか？
   - 大きさをどう測るか？（個数、測度）

1983年までに
わかっていたこと

- $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- $\binom{[n]}{k} = \{F \subset [n] : |F| = k\}$.
- $2^{[n]} = \{F : F \subset [n]\}$.
- $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が t 交差族 $\iff |F \cap F'| \geq t$ for all $F, F \in \mathcal{F}$.

定理 (Erdős–Ko–Rado)

$n \geq n_0(k, t)$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が t 交差族ならば、$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-t}{k-t}$ である。

定理 (Erdős–Ko–Rado)

$n \geq n_0(k,t)$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が t 交差族ならば、$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-t}{k-t}$ である。

Kneser graph $G = G(n,k,t)$

- $V(G) = \binom{[n]}{k}$.
- 2 頂点 x, y が隣接 $\iff |x \cap y| < t$.
- $U \subset V(G)$ が独立集合 $\iff U$ は t 交差族。

定理 (Erdős–Ko–Rado)

$n \geq n_0(k,t)$ ならば $G(n,k,t)$ の独立数は $\binom{n-t}{k-t}$ である。

定理 (Erdős–Ko–Rado)

$n \geq n_0(k,t)$ ならば $G(n,k,t)$ の独立数は $\binom{n-t}{k-t}$ である。

- optimal な n_0 は $n_0(k,t) = (t+1)(k-t+1)$.
- Wilson はこれをグラフの固有値を利用して証明した (1983)。
- $n < (t+1)(k-t+1)$ の場合は難しい。
- 難しいが、独立数は完全にわかっている。
- Ahlswede–Khachatrian の the complete intersection theorem
- 2 種類の組合せ論的証明だけが知られている (1995, 1997)。

目標：よい性質をもつ特別なグラフの独立数（的な量）を固有値を利用して評価する。

G は d 正則 N 点グラフ。N 次行列 A が、G の隣接行列とは：

- A は対称行列で、行と列は $V(G)$ で index される。
- x と y が非隣接ならば $(A)_{x,y} = 0$.
- A の行和は一定、そこで $A\mathbf{1} = d\mathbf{1}$ とする。

定理 (Hoffman's ratio bound)

$$\frac{\alpha(G)}{|V(G)|} \leq \frac{-\lambda}{d-\lambda}. \quad (\lambda \text{は最小固有値})$$

Wilson は $G = G(n, k, t)$ について、$n \geq (t+1)(k-t+1)$ のとき右辺が $\binom{n-t}{k-t}/\binom{n}{k}$ となる隣接行列を構成した。

ratio bound を証明するための準備

- G を d 正則 N 点グラフ、A をその隣接行列とする。
- 独立集合 $U \subset V(G)$ の特性列ベクトルを $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^N$ とする。
- ただし $(\boldsymbol{x})_i = x_i$ とする。
- $X = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top$ とおく。X は N 次行列で $(X)_{i,j} = x_i x_j$.
- 行列 B, C に対して、$B \bullet C = \sum_{i,j} (B)_{i,j} (C)_{i,j}$ とおく。
- $I \bullet X = \sum_i x_i^2 = |U|$.
- $J \bullet X = \sum_{i,j} x_i x_j = \sum_i x_i \sum_j x_j = |U|^2$.
- $A \bullet X = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j = 0$.

- N 次対称行列 S が半正定値とは $S \bullet (\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^\top) \geq 0$ for all $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$.
- これは S の固有値がすべて非負と同値。

ratio bound $\dfrac{\alpha(G)}{N} \leq \dfrac{-\lambda}{d-\lambda}$ の証明

- A を隣接行列、$X = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top$ を最大独立集合 U の特性行列とする。
- $I \bullet X = |U|,\ \ J \bullet X = |U|^2,\ \ A \bullet X = 0.$
- $S := \epsilon I - J + \delta A$ とおくと、$S \bullet X = \epsilon |U| - |U|^2.$
- もし S が半正定値なら、$S \bullet X \geq 0$ より $\alpha(G) = |U| \leq \epsilon.$
- $\epsilon = \frac{-\lambda N}{d-\lambda},\ \ \delta = \frac{N}{d-\lambda}$ とおけばうまくいく。 $\square$

Wilson の構成した隣接行列

- $A := \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^{t-1-i}\binom{k-1-i}{k-t}\binom{n-k-t+i}{k-t}^{-1}B_{k-i}$
- ただし B_j も $\binom{[n]}{k}$ で index された行列で、$(B_j)_{x,y} = \binom{|x \setminus y|}{j}$.
- 包含行列 $W_{j,k}$ と排除行列 $\bar{W}_{j,k}$ を用いると $B_j = (\bar{W}_{j,k})^\top W_{j,k}$.
- $I, J, W_{j,k}, \bar{W}_{j,k}$ は（したがって B_j, A も）Johnson scheme の Bose-Mesner 代数に入る（ので固有値がわかる）。
- しかし A の固有値の計算はかなり面倒。

$\mathcal{F},\mathcal{G}\subset 2^{[n]}$ が互いに t 交差するとは、$|F\cap G|\geq t$ for all $F\in\mathcal{F}$, $G\in\mathcal{G}$.

定理 (Pyber 1983)

$n\geq 2k$ で $\mathcal{F},\mathcal{G}\subset\binom{[n]}{k}$ が互いに 1 交差するならば、$|\mathcal{F}||\mathcal{G}|\leq\binom{n-1}{k-1}^2$.

- Pyber の証明は組合せ論的なもの。代数的な証明もある (T. 2013)。
- $\mathcal{F}\subset\binom{[n]}{k}$, $\mathcal{G}\subset\binom{[n]}{l}$ にも拡張できる。(Matsumoto–T. 1987)
  即ち、$n\geq 2k\geq 2l$ のとき $|\mathcal{F}||\mathcal{G}|\leq\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}$.
- そのベクトル空間版は半正定値計画法を用いて得られた。
  (Suda–Tanaka 2013) 同じ方法で M–T の結果も示せる。

最近の話題

予想

$n \geq (t+1)(k-t+1)$ で $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \binom{[n]}{k}$ が互いに t 交差するならば、$|\mathcal{F}||\mathcal{G}| \leq \binom{n-t}{k-t}^2$ である。

- EKR は $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ の場合、Pyber の定理は $t = 1$ の場合。
- 予想は $t \geq 3$ で正しい。H. Zhang, B. Wu. JCTB 171 (2025), 49–70. 証明は組合せ論的、Ahlswede–Khachatrian のアイデアを利用。
- 予想は $t = 2$ でも正しい。Tanaka-T. 証明は代数的 (SDP の利用)。

定理 (Pyber ($t = 1$), Zhang–Wu ($t \geq 3$), Tanaka–T ($t = 2$))

$t \geq 1$, $n \geq (t+1)(k-t+1)$ とする。
$\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \binom{[n]}{k}$ が互いに t 交差するならば、$|\mathcal{F}||\mathcal{G}| \leq \binom{n-t}{k-t}^2$ である。

- 2 部 Kneser graph $G = G(n, k, k, t)$ を構成する。
- $V(G) = V_1 \sqcup V_2$, ただし V_i は $\binom{[n]}{k}$ のコピー。
- $x \in V_1$ と $y \in V_2$ が隣接 $\iff |x \cap y| < t$.
- $U_1 \subset V_1$ と $U_2 \subset V_2$ が独立集合対 $\iff U_1, U_2$ 間に辺がない。
- このとき U_1, U_2 は互いに t 交差する。
- U_i の特性ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする。$\frac{1}{\sqrt{|U_1|}}\boldsymbol{x}_1$ と $\frac{1}{\sqrt{|U_2|}}\boldsymbol{x}_2$ をつなげた $2\binom{n}{k}$ 次元列ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。さらに $X := \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}$ とおく。
- $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \bullet X = 1$.
- $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \sqrt{|U_1||U_2|}$.

- $S := \frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^\top & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$ とおく。
- ただし、A, Z は対称行列で、
- A は $(A)_{x,y} = 0$ for $|x \cap y| \geq t$ をみたし、Z は非負。
- このとき、$\left[\begin{smallmatrix} 0 & A \\ A^\top & 0 \end{smallmatrix}\right] \bullet X = 0, \quad \left[\begin{smallmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{smallmatrix}\right] \bullet X \geq 0.$
- もし S が半正定値ならば、$S \bullet X \geq 0.$
- これと $\frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right] \bullet X = 1, \quad \frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{smallmatrix}\right] \bullet X = \sqrt{|U_1||U_2|}$ から $\sqrt{|U_1||U_2|} \leq \alpha$ を得る。

定理 (Tanaka–T 2025)

$n \geq 3(k-1)$ で $U_1, U_2 \subset \binom{[n]}{k}$ が独立集合対ならば $|U_1||U_2| \leq \binom{n-2}{k-2}^2$.

- $S := \frac{\binom{n-2}{k-2}}{2}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^{\mathsf{T}} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$ とおく。
- A は $(A)_{x,y} = 0$ for $|x \cap y| \geq 2$ をみたし、Z は非負。
- もし S が半正定値ならば、$\sqrt{|U_1||U_2|} \leq \binom{n-2}{k-2}$ が得られる。
- S が半正定値となるような A と Z を構成すればよい！

- $\binom{[n]}{k}$ で index された行列 C_i を

$$(C_i)_{x,y} := \begin{cases} 1 & \text{if } |x \cap y| = i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  と定義する。C_i も包含行列、排除行列を用いて表せる。
- A, Z を次の形から探す。

$$A = \epsilon_0 C_0 + \epsilon_1 C_1,$$
$$Z = \gamma_0 C_0 + \gamma_1 C_1.$$

- I, J, A, Z は Johnson scheme の Bose–Mesner 代数に入る。
- 定数 $\epsilon_0, \epsilon_1, \gamma_0, \gamma_1$ をうまく選ぶと S が半正定値になる。

- $\epsilon_1 > 0$ を十分小さくとり、

$$\epsilon_0 = -\frac{k^2}{n-2k+1}\epsilon_1 + \frac{k(k-1)}{2n(n-1)}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}^{-1},$$

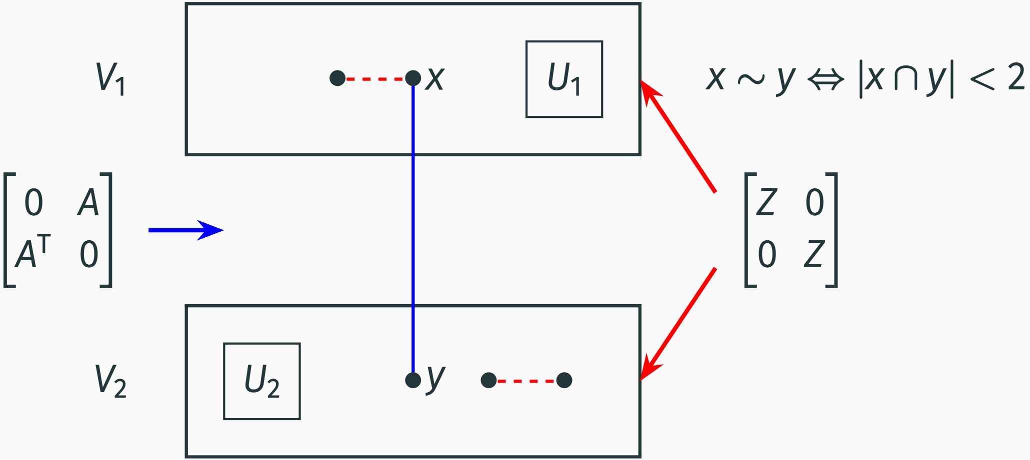
$$\gamma_0 = \frac{k^2}{n-2k+1}\epsilon_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{k^2(n-k)}{n(n-1)} - 1\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}^{-1},$$

$$\gamma_1 = -\epsilon_1 - \frac{(n-k)(n-2k+1)}{2n(n-1)}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}^{-1}.$$

  とおくと、S は半正定値になる。

- 固有値が非負であることのチェックはかなり面倒。

2部 Kneser graph $G(n, k, k, 2)$



測度版

- 実数 $p \in (0,1)$ を固定。$\Omega := 2^{[n]}$ とおく。
- 測度 $\mu_p : 2^{\Omega} \to [0,1]$ を以下で定義。

$$\mu_p(\mathcal{F}) := \sum_{F \in \mathcal{F}} p^{|F|} (1-p)^{n-|F|}.$$

- 例えば $p = \frac{1}{2}$ ならば $\mu_p(\mathcal{F}) = \frac{|\mathcal{F}|}{2^n}$.
- (EKR) $\frac{k}{n} \le \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が1交差族ならば $|\mathcal{F}|/\binom{n}{k} \le \frac{k}{n}$.
- (測度版) $p \le \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が1交差族ならば $\mu_p(\mathcal{F}) \le p$.
- $\frac{k}{n}$ と p が対応している。

- (t-EKR) $\frac{k-t+1}{n} \le \frac{1}{t+1}$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が t 交差族ならば $|\mathcal{F}| \le \binom{n-t}{k-t}$.
- (測度版) $p \le \frac{1}{t+1}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が t 交差族ならば $\mu_p(\mathcal{F}) \le p^t$.
- $n > k \gg t$ ならば $\frac{k-t+1}{n} \sim \frac{k}{n}$, $\binom{n-t}{k-t} \sim \left(\frac{k}{n}\right)^t \binom{n}{k}$.
- やはり $\frac{k}{n}$ と p が対応している。

予想

$p \le \frac{1}{t+1}$ で $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset 2^{[n]}$ が互いに t 交差すれば、$\mu_p(\mathcal{F})\mu_p(\mathcal{G}) \le (p^t)^2$.

- 予想は $t \ge 14$ なら正しい。Frankl–Lee–Siggers–T 2013. 乱歩法。
- 予想は $p < 1 - 2^{-1/t}$ なら正しい。Filmus, T 2013.
- 予想は $t = 2$ なら正しい。Tanaka-T. SDP を利用した証明。

定理 (Tanaka–T 2025)

$p \le \frac{1}{3}$ で $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset 2^{[n]}$ が互いに 2 交差すれば $\mu_p(\mathcal{F})\mu_p(\mathcal{G}) \le p^4$ である。

- $S := \frac{p^2}{2}\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \Delta J \Delta \\ \Delta J \Delta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^{\mathsf{T}} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$ とおく。
- $\Delta = \left[\begin{smallmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right] \otimes \cdots \otimes \left[\begin{smallmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right]$ (n-folded tensor)
- A は $(A)_{x,y} = 0$ for $|x \cap y| \ge 2$ をみたし、Z は非負。
- もし S が半正定値ならば、$\mu_p(\mathcal{F})\mu_p(\mathcal{G}) \le p^4$ が得られる。
- S が半正定値となるような A と Z を構成すればよい！

- Sが半正定値となるAとZをC_0とC_1の線形結合で作れる。
- ただし$A_2 := \begin{bmatrix} 1 - \frac{p}{1-p} & \frac{p}{1-p} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$とおいて
- $C_0 := A_2 \otimes \cdots \otimes A_2$ (n-folded tensor),
- C_1は$n-1$個のA_2と1個のI_2のテンソル積の平均とする。
  例えば$n=3$なら

$$C_1 := \frac{1}{3}\left(A_2 \otimes A_2 \otimes I_2 + A_2 \otimes I_2 \otimes A_2 + I_2 \otimes A_2 \otimes A_2\right).$$

- この方法は $t=2$ ではうまくいくが、$t \geq 3$ だとダメ。
- C_0, C_1 の探索範囲を拡げると $t \geq 3$ でもうまくいくか？
- C_0, C_1 を hypercube の Terwilliger 代数から選べばどうか？？

予想

$p_1 \leq p_2 \leq \frac{1}{3}$ で、$\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset 2^{[n]}$ が互いに 2 交差すれば、
$\mu_{p_1}(\mathcal{F})\,\mu_{p_2}(\mathcal{G}) \leq (p_1 p_2)^2$ である。

予想

$k \geq l, n \geq 3(k-1)$ で、$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ と $\mathcal{G} \subset \binom{[n]}{l}$ が互いに 2 交差すれば、
$|\mathcal{F}||\mathcal{G}| \leq \binom{n-2}{k-2}\binom{n-2}{l-2}$ である。